

Time ; 3 Hours

समय ; 3 घंटे

All question are compulsory :

सभी प्रश्न अनिवार्य है।

Candidates are required to give their answers in own words as far as practicable.

परीक्षार्थी यथासंभव अपने ही शब्दों में उत्तर दें।

General Instructions :

सामान्य निर्देश :

- (1) The question paper consists of 29 questions divided into three sections – A, B and C.
इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन खण्डों – 'अ', 'ब' और 'स' में बंटे हैं।
- (2) Section- A comprises of 10 questions of 1 marks each.
खण्ड 'अ' में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 1 अंक का है।
- (3) Section- B comprises of 12 questions of 4 marks each.
खण्ड 'ब' में 12 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 4 अंक का है।
- (4) Section- C comprises of 7 questions of 6 marks each.
खण्ड 'स' में 7 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक 6 अंक का है।
- (5) Use of calculator is not permitted. However, you may ask for logarithmic and statistical tables, if required.
कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है। आवश्यकता हो तो परीक्षार्थी के माँग पर लघुगणकीय तथा सांख्यिकीय सारणी उपलब्ध करायी जा सकती है।

Section – 'A'

खण्ड – 'अ'

1. Let * be a binary operation on $R - \{-1\}$, defined by $a * b = \frac{a}{b+1}$. Find the value of $2 * 3$
मान लीजिए कि $R - \{-1\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित है तो $2 * 3$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. Find the value of $\cos^{-1} \frac{1}{2} + 2 \sin^{-1} \frac{1}{2}$
 $\cos^{-1} \frac{1}{2} + 2 \sin^{-1} \frac{1}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. Construct a 2×2 matrix whose elements are $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$
एक 2×2 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव हैं $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$
4. If (यदि) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $|3A|$
5. Find the slope of tangent to the curve $y = x^3 - 2x + 7$ at (1, 6)
वक्र $y = x^3 - 2x + 7$ के (1, 6) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करें।
6. Find (ज्ञात करें) $\frac{dy}{dx}$:
If (यदि) $y = e^x \cos x$
7. Find the value of $\int (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) dx$.
मान ज्ञात कीजिए $\int (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) dx$.

8. If $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} - z\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - y\hat{j} + \hat{k}$ are two equal vectors, then find the value of $x + y + z$.
यदि $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} - z\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - y\hat{j} + \hat{k}$ समान सदिश हो तो $x + y + z$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. What is the projection of vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ along the vector \hat{j} ?
सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश \hat{j} की दिशा में प्रक्षेप्य क्या होगा।
10. Find the vector equation of the line $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{2}$
रेखा $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Section – 'B'

खण्ड – 'ब'

11. Consider three functions $f: N \rightarrow N$, $g: N \rightarrow N$ and $h: N \rightarrow R$ defined by $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ and $h(z) = \sin z$, $\forall x, y, z \in N$. Show that $ho(gof) = (hog)$ of
तीन फलन $f: N \rightarrow N$, $g: N \rightarrow N$ और $h: N \rightarrow R$ परिभाषित है। $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ तथा $h(z) = \sin z$, $\forall x, y, z \in N$. तो सिद्ध कीजिए कि $ho(gof) = (hog)$ of.
12. Prove that (सिद्ध कीजिए कि) $\tan^{-1} \frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} = \tan^{-1} \frac{a}{b} - x$
13. Prove that (सिद्ध कीजिए कि)

$$\begin{vmatrix} x+y & 2x & 2x \\ 2x & x+y & 2x \\ 2x & 2x & x+y \end{vmatrix} = (5x+y)(y-x)^2$$

OR/ अथवा

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

14. Test the continuity of the function at $x = 2$
 $x = 2$ पर फलन के सांतत्यता की जाँच कीजिए –

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

15. If (यदि) $y = x^x - 2^{\sin x}$ then find (तो ज्ञात कीजिए) $\frac{dy}{dx}$

OR/ अथवा

If (यदि) $y = (\tan^{-1} x)^2$ then show that (तो सिद्ध कीजिए कि) $(1+x^2)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$

16. Sand is pouring from a pipe at the rate of $12\text{cm}^3/\text{sec}$. The falling sand forms a cone on the ground in such a way that the height of the cone is always one-sixth of the radius of the base. How fast is the height of the sand cone increasing when the height is 4cm ?
 $12\text{cm}^3/\text{sec}$ की दर से एक पाईप से बालू को ढाला जाता है। जमीन पर गिरता हुआ बालू एक शंकु इस प्रकार बनाता है कि शंकु की ऊँचाई हमेशा आधार की त्रिज्या के 6वें भाग के बराबर होता है। शंकुवाकार बालू के ऊँचाई में वृद्धि की दर क्या होगा जब उसकी ऊँचाई 4cm हो ?

OR/अथवा

Find the equation of tangent to the curve given by $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ at a point where $t = \frac{\pi}{2}$

वक्र $x = a \sin^3 t$ तथा $y = b \cos^3 t$ के बिन्दु $t = \frac{\pi}{2}$ पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. Evaluate (ज्ञात कीजिए) –

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$$

18. find (ज्ञात कीजिए) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

OR/अथवा

Evaluate $\int_0^2 e^x dx$ as the limit of a sum.

योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

19. Evaluate (ज्ञात कीजिए) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

20. If \hat{a} , \hat{b} and \hat{c} are mutually perpendicular unit vectors, then find the value of $|2\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}|$

यदि \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} परस्पर लम्बवत इकाई सदिश हैं तो $|2\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. Find the angle between the following lines –
निम्नलिखित समतलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए –
 $2x + y - 2z = 5$
 $3x - 6y - 2z = 7$

OR/अथवा

Find the equation of the plane through the intersection of the planes $3x - y + 2z - 4 = 0$ and $x + y + z - 2 = 0$ and the point $(2, 2, 1)$

बिन्दु $(2, 2, 1)$ तथा समतलों $3x - y + 2z - 4 = 0$ तथा $x + y + z - 2 = 0$ के कटान से होकर जाने वाला समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

22. Let A and B be independent events with $P(A) = 0.3$ and $P(B) = 0.4$. Find

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$

मान A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = 0.3$ तथा $P(B) = 0.4$ तो ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (iv) $P\left(\frac{B}{A}\right)$

OR/अथवा

A die is thrown. Find the probability of the occurrence of a number less than 5. If it is known that only odd numbers occur.

एक पासा की फेंक में यदि विषम संख्या उपर आती है तो उसे 5 से कम होने की क्या प्रायिकता है?

Section – 'C'

खण्ड – 'स'

23. Solve the system of linear equation using matrix method.

रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल करें।

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

OR/अथवा

Obtain the inverse of the matrix using elementary operations.

(प्रारम्भिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

24. Find the maximum and minimum value of the given function :-

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

दिए गए फलन का महत्तम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए –

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

25. Find the area enclosed between the circle $x^2 + y^2 = 25$ and the straight line $x + y = 5$.

वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ तथा सरल रेखा $x + y = 5$ के बीच घिरे भाग का क्षेत्रफल निकालें।

OR/अथवा

Prove that (सिद्ध कीजिए कि)

$$\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx = -\pi \log 2.$$

26. Solve the differentiated equation :

अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} = y - x \tan \frac{y}{x}$$

OR/अथवा

Find the particular solution of the differential equation.

दिये गये अवकल समीकरण का विशेष हल ज्ञात कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x ; y = 0 \text{ when } x = \frac{\pi}{3}$$

27. Find the shortest distance between the lines.

रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\vec{r} = i\hat{+} + 2j\hat{+} - 4k\hat{+} + \lambda(2i\hat{+} + 3j\hat{+} + 6k\hat{+})$$

$$\vec{r} = 3i\hat{+} + 3j\hat{+} - 5k\hat{+} + \mu(2i\hat{+} + 3j\hat{+} + 6k\hat{+})$$

28. Given three identical boxes I, II and III each containing two coins. In box I, both coins are gold coins in box II, both are silver coins and in the box III there is one gold and one silver

coin. A person choose a box at random and takes out a coin. If the coin is of gold, what is the probability that other coin in the box is also of gold?

दिये गये तीन समरूप बॉक्स I, II और III, प्रत्येक में दो सिक्का रखता है। बॉक्स I में दोनों सिक्के सोने के हैं। बॉक्स II में दोनों सिक्के चाँदी के हैं तथा बॉक्स III में एक सोना तथा एक चाँदी का सिक्का है। एक आदमी एक बॉक्स को यादृच्छया चुनता है तथा एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है तो क्या प्रायिकता होगी कि दूसरा सिक्का बॉक्स में सोने का ही है।

OR/अथवा

A die thrown 6 times. If 'getting an even number' is a success. Find the probability of getting-

(i) exactly 5 successes

(ii) at least 5 successes

(iii) at most 5 successes

एक पासा 6बार फेंका जाता है यदि सम संख्या प्राप्त करना सफलता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब –

(i) ठीक 5 सफलताएँ प्राप्त हो

(ii) कम से कम 5 सफलताएँ प्राप्त हो

(iii) अधिक से अधिक 5 सफलताएँ प्राप्त हो

29. Solve the following L PP graphically :

Maximize : $z = 45x + 80y$

Subject to $5x + 20y \leq 400$

$10x + 15y \leq 450$

$x, y \geq 0$

निम्नांकित L PP का आलेखीय हल निकालें :

अधिकतमीकरण कीजिए : $z = 45x + 80y$

जबकि $5x + 20y \leq 400$

$10x + 15y \leq 450$

$x, y \geq 0$